Lezione 5

Schemi a blocchi

Elementi costitutivi di uno schema a blocchi

Gli schemi a blocchi costituiscono un formalismo per rappresentare graficamente le interazioni tra sistemi dinamici.

Vediamone gli elementi costitutivi:

Il blocco

Il blocco non è altro che un simbolo indicante la presenza di un sistema dinamico, avente la funzione di trasferimento riportata nel simbolo del blocco, e l'ingresso e l'uscita riportati rispettivamente sulla freccia entrante e sulla freccia uscente dal blocco:

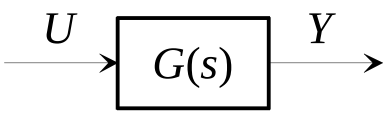
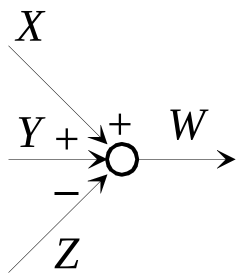


Fig. 1 : Un blocco

Il nodo sommatore

L'uscita del nodo è data dalla somma algebrica dei segnali che entrano nel nodo, ciascuno preso con il proprio segno (se non è indicato il segno, si assume per convenzione il segno positivo).

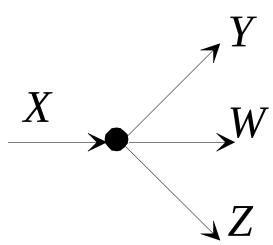


$$W = X + Y - Z$$

Fig. 2 : Un nodo sommatore

Il punto di diramazione

Tutti i segnali uscenti da un punto di diramazione sono uguali al segnale entrante nel punto.



$$Y = X$$
$$W = X$$
$$Z = X$$

Fig. 3 : Un punto di diramazione

Schemi di interconnessione

Sistemi in cascata (o serie)

Due sistemi si dicono in cascata (o in serie) se l'uscita di uno è l'ingresso dell'altro.

Graficamente si ha la seguente situazione:

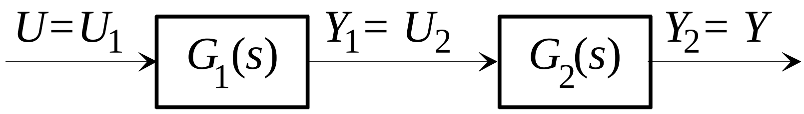


Fig. 4 : Blocchi in cascata

La funzione di trasferimento dall'ingresso del primo sistema all'uscita del secondo si ottiene come segue:

$$Y(s) = Y_2(s) = G_2(s)U_2(s) = G_2(s)Y_1(s) = G_2(s)G_1(s)U_1(s) = G_2(s)G_1(s)U(s)$$

Pertanto:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s)G_2(s)$$

La funzione di trasferimento del sistema costituito dalla cascata di due sottosistemi è quindi data dal **prodotto** delle due funzioni di trasferimento parziali.

Sistemi in parallelo

Due sistemi si dicono in parallelo se hanno lo stesso ingresso, mentre le loro uscite si sommano (algebricamente) per determinare l'uscita del sistema risultante.

Graficamente si ha la seguente situazione:

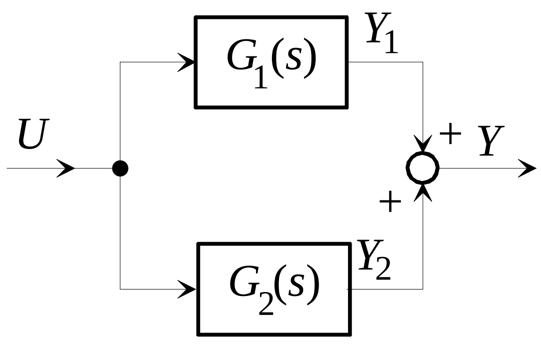


Fig. 5 : Blocchi in parallelo

La funzione di trasferimento dall'ingresso comune ai due sistemi all'uscita si ottiene come segue:

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) = G_1(s)U(s) + G_2(s)U(s) = \left[G_1(s) + G_2(s)\right]U(s)$$

Pertanto:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s) + G_2(s)$$

La funzione di trasferimento del sistema costituito dal parallelo di due sottosistemi è quindi data dalla **somma algebrica** delle due funzioni di trasferimento parziali, ciascuna presa con il segno con cui la sua uscita entra nel nodo sommatore.

Sistemi in retroazione

Due sistemi si dicono connessi in retroazione quando l'uscita del primo è l'ingresso del secondo, mentre l'uscita del secondo si somma o si sottrae ad un ingresso esterno per determinare l'ingresso del primo sistema.

Si hanno quindi due possibili schemi di connessione:

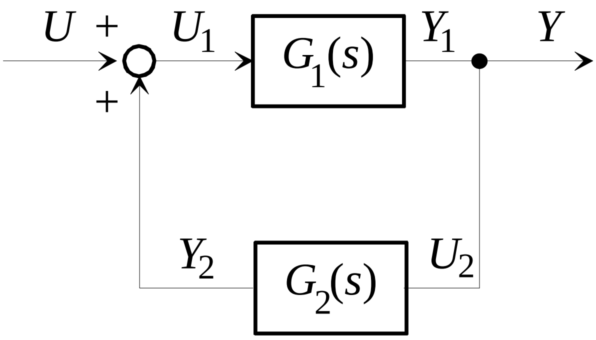


Fig. 6 : Blocchi in retroazione positiva

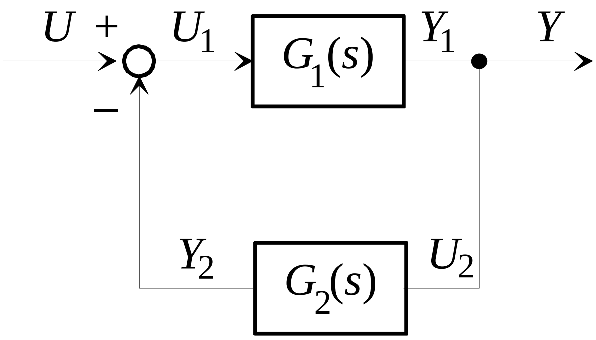


Fig. 7 : Blocchi in retroazione negativa

In entrambi i casi:

G_1: funzione di trasferimento della **linea di andata**

G_2: funzione di trasferimento della **linea di retroazione**

Consideriamo il caso di retroazione **positiva** e calcoliamo la funzione di trasferimento dall'ingresso U all'uscita Y:

$$Y(s) = Y_1(s) = G_1(s)U_1(s) = G_1(s)\left[U(s) + Y_2(s)\right] = G_1(s)\left[U(s) + G_2(s)U_2(s)\right] =$$

$$= G_1(s)\left[U(s) + G_2(s)Y(s)\right] = G_1(s)U(s) + G_1(s)G_2(s)Y(s)$$

Pertanto:

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{G_1(s)}{1-G_1(s)G_2(s)}$$

Analogamente, nel caso di retroazione **negativa**:

$$\begin{aligned}Y(s)&=Y_1(s)=G_1(s)U_1(s)=G_1(s)\left[U(s)-Y_2(s)\right]=G_1(s)\left[U(s)-G_2(s)U_2(s)\right]=\\&=G_1(s)\left[U(s)-G_2(s)Y(s)\right]=G_1(s)U(s)-G_1(s)G_2(s)Y(s)\end{aligned}$$

e quindi:

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}$$

La funzione di trasferimento $G_1(s)G_2(s)$ prende il nome di **funzione di trasferimento d'anello**.

La regola per trovare la funzione d trasferimento del sistema complessivo (**sistema in anello chiuso**) è quindi la seguente :

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{\text{f.d.t. linea di andata}}{1\mp\text{f.d.t. d'anello}}\qquad\begin{aligned}&-:\ \text{retroazione positiva}\\&+:\ \text{retroazione negativa}\end{aligned}$$

Stabilità degli schemi di interconnessione

Sistemi in cascata

Siano:

$$G_1(s)=\frac{N_1(s)}{D_1(s)},\quad G_2(s)=\frac{N_2(s)}{D_2(s)}\ ,$$

le funzioni di trasferimento dei due sistemi in cascata, espresse come rapporti di polinomi.

La funzione di trasferimento del sistema complessivo sarà quindi:

$$G(s)=G_1(s)G_2(s)=\frac{N_1(s)}{D_1(s)}\frac{N_2(s)}{D_2(s)}\ .$$

Il denominatore di $G(s)$ è dato dal prodotto dei denominatori delle funzioni di trasferimento parziali: ne consegue che i poli del sistema complessivo sono la riunione dei poli dei due sottosistemi in cascata. Pertanto:

Un sistema costituito dalla cascata di due o più sottosistemi è asintoticamente stabile se e solo se lo sono tutti i sottosistemi che compongono la cascata.

Il precedente ragionamento non prevede la possibilità che vi siano radici di N_1 uguali a radici di D_2, o radici di N_2 uguali a radici di D_1, ossia che intervengano *cancellazioni* tra poli di una funzione di trasferimento e zeri dell'altra. Se viceversa tali cancellazioni avvengono, occorre porre attenzione al fatto che i poli cancellati siano o meno a parte reale negativa (ossia nel semipiano sinistro).

Se infatti tutti i poli cancellati sono nel semipiano sinistro, essi non hanno alcun ruolo nel determinare l'asintotica stabilità del sistema complessivo, che viene ovviamente a dipendere dai poli non cancellati. Se invece almeno uno dei poli cancellati non è nel semipiano sinistro, mentre tutti i poli non cancellati lo sono, si sarebbe indotti a ritenere che il sistema risultante sia asintoticamente stabile (il denominatore della funzione di trasferimento ottenuto a seguito delle cancellazioni presenterebbe tutte radici nel semipiano sinistro). In realtà una situazione di questo tipo corrisponderebbe alla presenza di una instabilità (o, comunque, non asintotica stabilità) *interna*: a seguito di una sollecitazione impulsiva all'ingresso, seppure la variabile di uscita del sistema si riporta, esaurito il transitorio, al valore di riposo, altre variabili interne possono crescere indefinitamente, o comunque non ritornare al valore di riposo.

Concludiamo quindi che la precedente affermazione sulla stabilità dei sistemi connessi in cascata è in realtà valida, facendo riferimento al concetto di stabilità interna, anche in presenza di cancellazioni tra poli e zeri.

Sistemi in parallelo

Siano:

$$G_1(s)=\frac{N_1(s)}{D_1(s)}, \quad G_2(s)=\frac{N_2(s)}{D_2(s)} \ ,$$

le funzioni di trasferimento dei due sistemi in parallelo. La funzione di trasferimento del sistema complessivo sarà quindi (i segni con cui avviene la somma sono irrilevanti ai fini della stabilità):

$$G(s)=G_1(s)+G_2(s)=\frac{N_1(s)}{D_1(s)}+\frac{N_2(s)}{D_2(s)}=\frac{N_1(s)D_2(s)+N_2(s)D_1(s)}{D_1(s)D_2(s)} \ .$$

Anche in questo caso, il denominatore di $G(s)$ è dato dal prodotto dei denominatori delle funzioni di trasferimento parziali: ne consegue che i poli del sistema complessivo sono la riunione dei poli dei due sottosistemi in cascata. Pertanto:

Un sistema costituito dal parallelo di due o più sottosistemi è asintoticamente stabile se e solo se lo sono tutti i sottosistemi che compongono il parallelo.

Un ragionamento analogo a quello sviluppato per i sistemi in cascata consente di concludere che l'affermazione è valida, con riferimento al concetto più generale di stabilità interna, anche in presenza di poli comuni tra le due funzioni di trasferimento (ovvero radici comuni di D_1 e D_2, che comportano cancellazioni).

Sistemi in retroazione

Siano:

$$G_1(s)=\frac{N_1(s)}{D_1(s)}, \quad G_2(s)=\frac{N_2(s)}{D_2(s)} \ ,$$

le funzioni di trasferimento dei due sistemi in retroazione. La funzione di trasferimento del sistema complessivo sarà quindi:

$$G(s)=\frac{G_1(s)}{1\mp G_1(s)G_2(s)}=\frac{\dfrac{N_1(s)}{D_1(s)}}{1\mp\dfrac{N_1(s)}{D_1(s)}\dfrac{N_2(s)}{D_2(s)}}=\frac{N_1(s)D_2(s)}{D_1(s)D_2(s)\mp N_1(s)N_2(s)} \ ,$$

con l'opportuno segno a seconda che si tratti di retroazione positiva o negativa.

Pertanto i poli del sistema in anello chiuso sono le radici del denominatore:

$$D_1(s)D_2(s)\mp N_1(s)N_2(s)$$

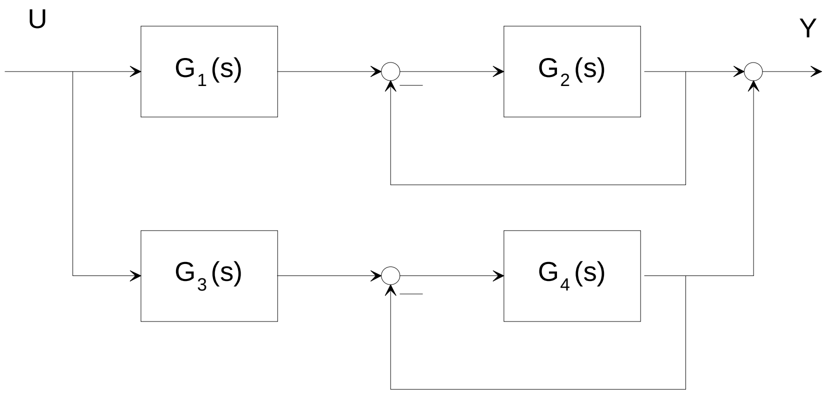
e non hanno nessuna relazione precisa con le radici dei polinomi D_1 e D_2, ossia con i poli dei due sottosistemi interconnessi. Pertanto:

Per un sistema costituito dalla retroazione di due sottosistemi non si può affermare nulla sulla asintotica stabilità del sistema in anello chiuso a partire dalla asintotica stabilità o meno dei due sistemi interconnessi.

Esercizi

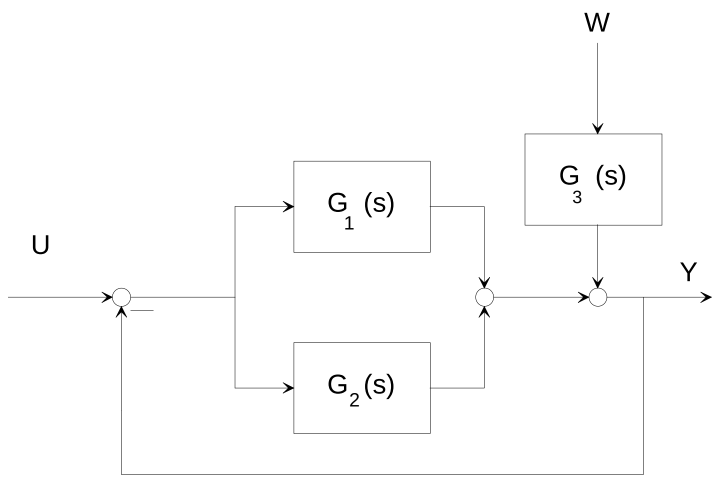
Esercizio 5.1

Si calcoli la funzione di trasferimento da *u* a *y* per il sistema descritto dal seguente schema a blocchi:



Esercizio 5.2

Si calcoli il legame, in termini di funzioni di trasferimento dagli ingressi *u* e *w* all'uscita *y* per il sistema descritto dal seguente schema a blocchi:



Traccia delle soluzioni

Esercizio 5.1

Risolvendo lo schema a blocchi si ottiene:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s)\frac{G_2(s)}{1+G_2(s)} + G_3(s)\frac{G_4(s)}{1+G_4(s)}$$

Esercizio 5.2

Risolvendo lo schema a blocchi si ottiene:

$$Y(s) = \frac{G_1(s)+G_2(s)}{1+G_1(s)+G_2(s)}U(s) + \frac{G_3(s)}{1+G_1(s)+G_2(s)}W(s)$$